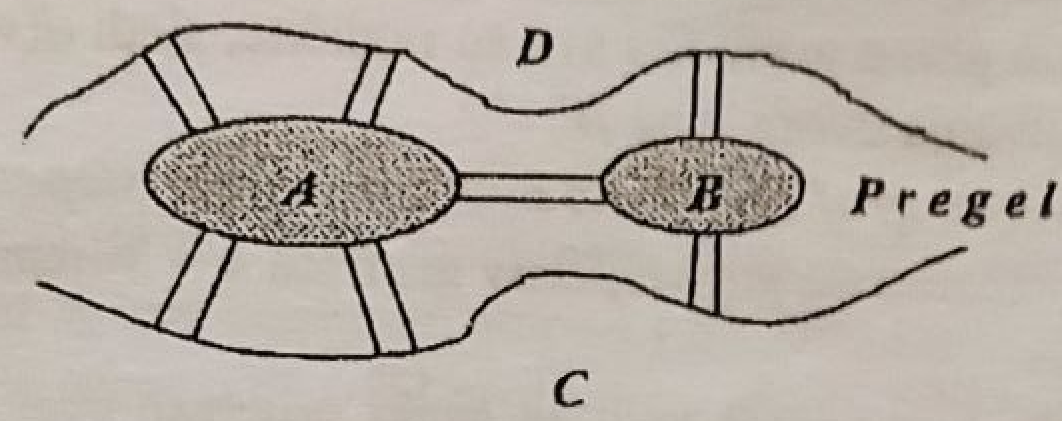
3. Ojlerovi i Hamiltonovi grafovi

3. 1 Ojlerovi grafovi

Kroz centar nekadašnjeg pruskog grada Keningsberga, danas Kalinjingrada, protiče reka Pregel. Na reci su dva ostrva povezana međusobno i sa obalama reke sa sedam mostova kao na sl. 1.



Sl. 1.

Priča se da su se stanovnici Keningsberga zabavljali pokušavajući da obiđu svih sedam mostova, a da pri tome preko svakog pređu tačno jedanput. Međutim uprkos svim nastojanjima nikome to nije pošlo za rukom. Isto tako niko nije bio u stanju ni da dokaže da je tako nešto neizvodljivo. Prvi koji je u tome uspeo bio je čuveni švajcarski matematičar Leonard Ojler (Leonhard Euler, 1736). Ojlerov dokaz nepostojanja odgovarajuće šetnje Keningberškim mostovima smatra se prvim rezultatom, a samim tim i početkom teorije grafova. U Ojlerovu čast čitava jedna klasa grafova dobila je ime ***Ojlerovi grafovi***.

Ojlerova kontura grafa G je zatvorena staza koja sadrži sve grane iz G. Graf koji ima Ojlerovu konturu zove se ***Ojlerov graf***.

Sledeće jednostavno tvrđenje koristiće se u dokazu glavne teoreme o Ojlerovim grafovima.

Teorema 1. *Ako je stepen svakog čvora grafa G veći od 1, tj.* $\delta(G) \geq 2$, *tada G sadrži konturu.*

Dokaz. Neka je $P = v_1 v_2 \dots v_k$ najduži put u G. Tada je $N(v_1) \subset V(P)$. U protivnom u G bi postojao duži put od P. Kako je $d(v_1) \geq 2$, postoji čvor v_i, $3 \leq i \leq k$, takav da $v_1 v_i \in E(G)$. Tada je $v_1 v_2 \dots v_i v_1$ kontura u G. ■

Teorema 2. *Neka je G netrivijalan graf bez izolovanih čvorova. G je Ojlerov graf ako i samo ako je povezan i svaki čvor je parnog stepena.*

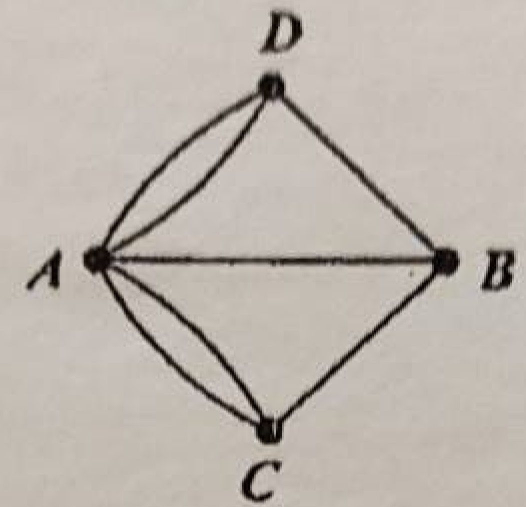
Dokaz. ($\Rightarrow$) *G je Ojlerov graf.* Neka je $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_0$ Ojlerova kontura u G. Pri tome $v_i \in V(G)$, $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$, ($e_i \neq e_j$ za $i \neq j$), i $|E(G)| = k$. Osim toga v_i i v_j, ($i \neq j$), mogu označavati isti čvor. Kako se svaki čvor pojavljuje se bar jedanput na W, za svaki par u, $v \in V(G)$ postoji (u-v)-staza $W[u, v]$. Ona sadrži (u-v)-put, pa je graf G povezan. Dalje, svako pojavljivanje čvora $v \in V(G)$ na Ojlerovoj konturi W prate po dve grane incidentne sa v. Kako W sadrži sve grane grafa G i sve su različite, sledi $d(v) = 2s$, ($s > 0$), gde je s broj pojavljivanja čvora v na W.

($\Leftarrow$) *G je povezan graf čiji su svi čvorovi parnog stepena.* Indukcijom po $|E(G)| = k$ pokazaćemo da je G Ojlerov graf. Za $k = 3$ imamo $G = K_3$ koji je očigledno Ojlerov.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki povezan graf sa manje od k grana, ($k > 3$), čiji su svi čvorovi parnog stepena. Neka je G graf sa k grana. Kako je G povezan, stepen svakog čvora je paran pozitivan broj, tj. $\delta(G) \geq 2$. Na osnovu teoreme 1 G sadrži konturu $C = u_1 u_2 \dots u_l u_1$, ($l \geq 3$). Ako se iz G uklone sve grane koje pripadaju konturi C dobija se graf $G' = G - E(C)$ čiji su svi čvorovi takođe parnog stepena. Zaista, ako $u \in V(C)$, tada je $d_{G'}(u) = d_G(u) - 2$. Ukoliko $u \notin V(C)$, tada $d_{G'}(u) = d_G(u)$. Neka su H_1, H_2, ... , H_t, ($t \geq 1$), komponente u G'. Svaka od njih je povezan graf čuji su svi čvorovi parnog stepena. Zbog povezanosti grafa G svaka komponenta H_i ima bar jedan zajednički čvor sa C. Kako ima manje od k grana, H_i je po indukcijskoj pretpostavci Ojlerov graf. Označimo sa C_i Ojlerovu konturu u H_i. Ojlerova kontura grafa G formira se na sledeći način.

Krene se od čvora u_1 na konturi C. On pripada nekoj komponenti grafa G', recimo H_1. "Opiše" se Ojlerova kontura C_1 komponente H_1, tako što se počne i završi u čvoru u_1. Zatim se ide konturom C, u pravcu $u_1 u_2 u_3$ ... , sve do prvog čvora u_i koji nije u komponenti H_1. Neka je u_i u komponenti H_2. U H_2 se uradi isto što i u H_1. Obiđe se Ojlerova kontura C_2, tako što se počne i završi u čvoru u_i. Dalje se ide konturom C do prvog čvora koji nije u $H_1 \cup H_2$ itd. U poslednjem t-tom koraku opiše se Ojlerova kontura C_t, koja počinje i završava se u nekom čvoru $u_j \in V(H_1)$. Zatim se granama $u_j u_{j+1}$, $u_{j+1} u_{j+2}$, ... , $u_l u_1$ vrati u početni čvor u_1. Dobijena (u_1-u_1)-staza očigledno je Ojlerova kontura grafa G. ■

Teorema 2 važi ne samo za proste grafove već i za multigrafove. Ako se obale reke Pregel i ostrva uzmu za čvorove, a mostovi za grane dobija se multigraf na sl. 2. On nema Ojlerovu konturu, jer ima četiri neparna čvora. Štaviše, kao što je Ojler svojevremeno i dokazao, nema ni Ojlerov put o kojem će dalje biti reč.



Sl. 2.

Graf G u kojem postoji staza koja sadrži sve grane grafa zove ***poluojlerov***, a takva staza zove se ***Ojlerov put***. Kao što je navedeno "Keningsberški" multigraf nije poluojlerov. Razlog za to je

Teorema 3. *Neka je G netrivijalan graf bez izolovanih čvorova. G je poluojlerov graf ako i samo ako je povezan i ima najviše dva čvora neparnog stepena.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) *G je poluojlerov.* G je očigledno povezan. Ako je G Ojlerov, dokaz je isti kao prvi deo prethodne teoreme. Uzmimo da G ima Ojlerov put ali ne i Ojlerovu konturu. Neka je $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$, ($v_0 \neq v_k$), Ojlerov put u G. Rezonujući na isti način kao u teoremi 2 zaključujemo da svi čvorovi parnog stepena, izuzev v_0 i v_k čiji su stepeni neparni.

($\Leftarrow$) *G je povezan graf sa najviše dva čvora neparnog stepena.* Ako nema čvorova neparnog stepena, G je Ojlerov graf, pa prema tome i poluojlerov.

Pretpostavimo da G ima tačno dva neparna čvora. Neka su to u i v. Uočimo graf G' koji se dobija iz G dodavanjem novog čvora w i grana uw i vw. Lako se vidi da je G' Ojlerov graf. Neka je W Ojlerova kontura u G'. Kako je $d_{G'}(w) = 2$, čvor w se pojavljuje tačno jedanput na konturi W; jedan sused mu je u, a drugi v. Uklanjanjem čvora w iz G', dobija se staza $W - w$, Ojlerov put u G. G je poluojlerov graf. ■

Ojlerovi putevi i konture pojavljuju se u zadacima tzv. rekreativne matematike. Problem je u tome da se zadata ravna figura, koja se sastoji od izvesnog broja tačaka (čvorova) i spojnica koje ih povezuju, nacrta "u jednom potezu" ili kako se još kaže "bez podizanja" pisaljke sa papira. Pri tome se svakom spojnicom mora preći tačno jedanput, dok je kroz čvorove dozvoljeno prolaziti i više puta. Prevedeno na jezik teorije grafova potrebno je nacrtati Ojlerov put, odnosno Ojlerovu konturu datog grafa (figure).

Teoreme 2 i 3 daju potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju Ojlerove konture, odnosno puta. Međutim one ne daju postupak za konstrukciju Ojlerove konture, odnosno puta u slučaju da ih graf poseduje. Daje ga ***Flerijev algoritam*** (Fleury).

Flerijev algoritam

1. Izabere se proizvoljan čvor $v_o \in V(G)$ i stavi $W_o = v_o$.
2. Ako je staza $W_i = v_o e_1 v_1 \dots e_i v_i$, $(i \geq 0)$, već izabrana, grana $e_{i+1} \in E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ bira se shodno sledećim uslovima:
   (a) e_{i+1} je incidentna sa v_i;
   (b) e_{i+1} nije most u grafu $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$, osim ako nema drugog izbora.
3. Ponovi se korak 2. Ako je nemoguće - STOP.

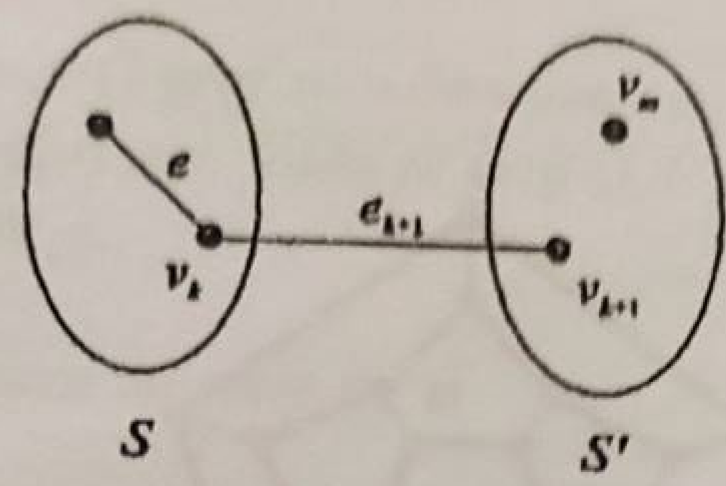
Flerijev algoritam nesumnjivo produkuje jednu stazu. Treba pokazati da je tako dobijena staza Ojlerova kontura grafa G.

Teorema 4. *Ako je G Ojlerov graf, tada svaka staza dobijena Flerijevim algoritmom predstavlja Ojlerovu konturu u G.*

Dokaz. Neka je $W_m = v_o e_1 v_1 \dots e_m v_m$ staza dobijena putem Flerijevog algoritma u Ojlerovom grafu G. Kako se nakon izbora grane e_m korak 2 više nije mogao izvesti, čvor v_m je stepena 0 u grafu $G_m = G - \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. S obzirom da su svi čvorovi grafa G parnog stepena, to je moguće samo za $v_m = v_o$. Dakle, W_m je zatvorena staza. Da bi W_m bila Ojlerova kontura neophodno je da važi $E(W_m) = E(G)$.

Pretpostavimo da je $E(W_m) \neq E(G)$. Tada je $E(G) - E(W_m) \neq \varnothing$ i graf G_m nije prazan. Označimo sa S skup čvorova iz G_m koji su pozitivnog stepena, a sa $S' = V(G_m) - S$ skup čvorova stepena 0. Po pretpostavci je $S \neq \varnothing$. Takođe je i $S' \neq \varnothing$, jer $v_m = v_o \in S'$. Neka je k najveći prirodan broj, takav da

$v_k \in S$ i $v_{k+1} \in S'$ Kako $v_m \in S'$, $e_{k+1} = v_k v_{k+1}$ je jedina grana koja spaja S i S' u grafu G_k.. To znači da je e_{k+1} most u G_k (sl. 3).



Sl. 3.

Neka je e, $(e \neq e_{k+1})$, grana u G_k incidentna sa v_k.. (Ona postoji jer u završnom grafu G_m čvor v_k ima pozitivan stepen.) Shodno koraku 2 Flerijevog algoritma i grana e je most u G_k.. (U protivnom ona bi bila izabrana u $(k + 1)$-om koraku, a ne e_{k+1}.) Kako je e most u G_k, e je most u svakom indukovanom pografu grafa G_k koji sadrži e. Specijalno, e je most u $G_k[S]$. S druge strane je $G_k[S] = G_m[S]$ i svi čvorovi grafa $G_m[S]$ su parnog stepena. (Zašto?) Isto važi i za $G_k[S]$. Tako je $G_k[S]$ graf čiji su svi čvorovi parnog stepena, a koji sadrži most. Kontradikcija sa zadatkom 35, glava 2. ∎

Uz malu modifikaciju, sličnu onoj u teoremi 3, Flerijevim algoritmom dobija se Ojlerov put u poluojlerovom grafu.

3. 2 Hamiltonovi grafovi

Slično Ojlerovim i Hamiltonovi grafovi imaju svoju predistoriju. Godine 1857 poznati irski matematičar Vilijam Hamilton (Ser William Rowan Hamilton) lansirao je sledeću igru na dodekaedru. Dodekaedar je jedan od pet pravilnih poliedara, Platonovih tela. Ima 12 strana i 20 temena. Sve strane su pravilni petouglovi i u svakom temenu sustiču se po tri. Hamilton je temena dodekaedra obeležio imenima 20 svetskih metropola i postavio zadatak da se nađe "put oko sveta". Pod tim je podrazumevao putanju ivicama dodekaedra koja kroz svako teme (metropolu) prolazi tačno jedanput i počinje i završava se u istom temenu.

Radi bolje preglednosti i orijentacije, umesto samog dodekaedra zgodno je posmatrati njegovu stereografsku projekciju (sl. 4). (Nešto više o stereografskoj projekciji može se naći u prvom paragrafu glave 4.) Tada se